Chapitre 1

Le modèle probabiliste

1.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une **expérience aléatoire**, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.
Exemples :
- l'enfant à naître sera une fille,
- l'équipe de l'OL va battre l'OM lors du prochain match qui les opposera,
- le dé va faire un nombre pair.

La première tâche qui vous attend est de décrire les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces **éventualités** un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter/fixer ce nombre, appelé probabilité ? Il existe plusieurs manières de voir.

- Proportion :

On lance un dé. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair" ? Chaque face du dé a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, intuitivement, $P(A) = \frac{3}{6} = 1/2$.

- Fréquence :

Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? On a observé un grand nombre de naissances. Notons k_n le nombre de filles nées en observant n naissances. Alors

$$P(\text{fille}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

mais cette limite a-t-elle un sens ?

- Opinion :

Quelle est la probabilité pour que l'équipe de Tunisie gagne la coupe d'Afrique des nations ? pour que l'OL soit championne de France ? Dans ce cas, on ne peut pas rejouer le même match dans les mêmes conditions plusieurs fois. On peut considérer les qualités des joueurs, des entraîneurs, les résultats de la saison... Mais le choix de la probabilité est forcément subjectif.

Attention aux valeurs des probabilités ! Elles sont choisies de manière arbitraire par le modélisateur et il faut les manipuler avec soin.

1.2 Espace des possibles, événements

On étudie une expérience aléatoire. L'**espace des possibles** ou **univers** décrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé **événement élémentaire**. On note souvent l'espace des possibles Ω et un résultat élémentaire ω. Un **événement** est un sous-ensemble de Ω, ou une réunion d'événements élémentaires. On dit qu'un événement est réalisé si un des événements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les événements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.

Exemples :
- Match OL-OM : $\Omega = \{\text{OL gagne, OM gagne, match nul}\}$. Donc Ω est composé de trois événements élémentaires. On peut considérer par exemple l'événement qui correspond à "Lyon ne gagne pas".
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. On peut s'intéresser à l'événement A="on obtient un chiffre pair", ie $A = \{2, 4, 6\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\} = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$. Ici, un événement élémentaire ω est un couple (i, j), où i représente le résultat du premier dé et j celui du second.
- On lance trois fois une pièce de monnaie. Les événements élémentaires vont décrire le plus précisément possible le résultat de cette expérience. Donc un événement élémentaire ω est un triplet (r_1, r_2, r_3) qui donne les résultats des trois lancers (dans l'ordre). L'événement B : "on obtient pile au deuxième lancer" est

$$B = \{(f, p, f), (f, p, p), (p, p, f), (p, p, p)\}$$

L'événement B est réalisé si on obtient l'un des événements élémentaires listés ci-avant. Il n'est parfois pas nécessaire de connaître tous ces détails. On pourra choisir : ω représente le nombre de "face" obtenus. Alors, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Le modèle est beaucoup plus simple, mais ne permet pas de décrire des événements tels que B.

Il existe un vocabulaire propre aux événements, différent du vocabulaire ensembliste.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

1.3 Probabilité

On se limite dans ce cours à étudier les univers dénombrables. La **probabilité** d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1.
Important : rappelons qu'un événement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω. Une probabilité associe à chaque événement un nombre entre 0 et 1. Il s'agit donc d'une application de l'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, dans $[0, 1]$.
Exemple : soit $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Construisons $\mathcal{P}(\Omega)$.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \Omega\Big\}$$

Définition 1 *Une probabilité est une application sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, telle que :*
- $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout événement* $A \subset \Omega$
- $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, *pour tout événement* A
- $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Que signifie "un événement A a pour probabilité..." ?
0.95 : A va très probablement se produire.
0.03 : A a très peu de chance d'être réalisé.
4.0 : incorrect.
-2 : incorrect.
0.4 : A va se produire dans un peu moins de la moitié des essais.
0.5 : une chance sur deux.
0 : aucune chance que A soit réalisé.

De la définition, on peut facilement déduire la proposition suivante, fort utile pour faire quelques calculs :

Proposition 2 *Soient A et B deux événements.*
1) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3) $P(\emptyset) = 0$.
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

preuve : 1) immédiat d'après le second point de la définition d'une probabilité.
2) Comme A et A^c sont incompatibles, $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.
3) $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(\Omega) = 0$.
4) La technique est très souvent la même pour calculer la probabilité d'une réunion d'ensembles : on écrit cette réunion comme une union d'ensembles incompatibles, puis on utilise le 1). Ici, on écrit $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ et on obtient : $P(A \cup B) = P(A) + P(A \cup (B \cap A^c))$. Puis on écrit $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ pour déduire $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$. En rassemblant ces deux égalités, on obtient la proposition.

Signalons une définition plus générale de probabilité, valable pour des espaces des possibles non dénombrables.

Définition 3 *Soit une expérience aléatoire et Ω l'espace des possibles associé. Une probabilité sur Ω est une application, définie sur l'ensemble des événements, qui vérifie :*
- axiome 1 : $0 \leq P(A) \leq 1$, pour tout événement A
- axiome 2 : pour toute suite d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, deux à deux incompatibles,

$$P\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

- axiome 3 : $P(\Omega) = 1$

NB : les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, si pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple important : probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. Il arrive, comme quand on lance un dé équilibré, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On parle alors d'événements élémentaires équiprobables. Notons p la probabilité de chaque événement élémentaire. Alors

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \times \text{card}(\Omega)$$

D'où $p = P(\omega) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$, pour tout ω. La probabilité ainsi définie sur l'ensemble Ω s'appelle probabilité uniforme. La probabilité d'un événement A se calcule facilement :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Attention ! Cette formule n'est valable que lorsque les événements élémentaires sont bien équiprobables. Dans ce cas, il suffit de savoir calculer le cardinal des ensembles considérés pour calculer les probabilités.

Un rappel des techniques de dénombrement est disponible à l'annexe A.

On est maintenant en mesure de **modéliser** des expériences aléatoires simples, c'est-à-dire :
- choisir Ω,
- choisir une probabilité sur Ω en justifiant ce choix.
Attention, pour décrire une probabilité, il faut donner $P(A)$ pour tout $A \subset \Omega$. Ou alors, on peut plus simplement donner $P(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le lecteur déduira $P(A)$ pour tout A d'après la définition d'une probabilité.

1.4 Indépendance et conditionnement

Exemple 4 *Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?*
Information supplémentaire : vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. Cette information va changer la probabilité.

L'outil qui permet cette mise à jour est la probabilité conditionnelle.

Définition 5 *Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B|A)$ définie par*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Utilisation 1 : quand $P(A)$ et $P(A \cap B)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B|A)$.
Utilisation 2 : Quand $P(B|A)$ et $P(A)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(A \cap B)$.

De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $P(.|A)$, est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemple 6 *Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ?*
Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience précisément.

$$\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}$$

Un événement élémentaire est un couple (x, y) où x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde.
Soit A l'événement "la première boule est rouge" et B l'événement "la seconde boule est rouge".

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v}$$

Proposition 7 (Formule des probabilités totales) *Soit A un événement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout événement B, on a*

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

preuve : Comme $A \cup A^c = \Omega$, $P(B) = P(B \cap (A \cup A^c)) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$. Or $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont incompatibles. On en déduit

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

La définition de la probabilité conditionnelle permet de conclure. □

Exemple 6 (suite) : quelle est la probabilité pour que la seconde boule tirée soit rouge ? On garde le même formalisme.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v} + \frac{r}{r+v-1} \cdot \frac{v}{r+v} \\ &= \frac{r}{r+v} \end{aligned}$$

Définition 8 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On l'appelle partition de Ω si elle vérifie les deux conditions :*
(i) $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$
(ii) les A_i sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 9 (Formule des probabilités totales généralisée) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B,*

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

La formule des probabilités totales permet de suivre les étapes de l'expérience aléatoire dans l'ordre chronologique. Nous allons maintenant voir une formule à remonter le temps...

Proposition 10 (Formule de Bayes) *Soit A et B deux événements tels que $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$. Alors,*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

preuve :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

et on conclut en remplaçant $P(B)$ par son expression donnée par la formule des probabilités totales. □

Proposition 11 (Formule de Bayes généralisée) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Soit un événement B, tel que $P(B) > 0$. Alors, pour tout $i \in I$,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j\in I} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Exemple 12 *Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans 5,2% des cas et ceux de B dans 6,7% des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?*
Soient les événements :
$T_A =$*“ le tableau est entré par A”,*
$T_B = (T_A)^c$*“ le tableau est entré par B”,*
$F =$*“ le tableau comporte des fautes”.*
D'après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A|F) &= \frac{P(F|T_A)P(T_A)}{P(F|T_A)P(T_A) + P(F|T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0.052 * 1/3}{0.052 * 1/3 + 0.067 * 2/3} = 0.279 \end{aligned}$$

Définition 13 *Deux événements A et B sont dits* **indépendants** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

S'il sont de probabilité non nulle, alors

$$P(B|A) = P(B) \Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

remarque 1 : A et B sont donc indépendants si la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre.
remarque 2 : deux événements incompatibles A et B, avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, ne sont jamais indépendants. En effet, $A \cap B = \emptyset$ entraîne $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

1.5 Répétitions indépendantes

Quand on étudie une expérience aléatoire qui peut se décomposer en plusieurs petites expériences aléatoires indépendantes, les calculs sont aisés. Et quand on a la probabilité uniforme pour chacune de ces petites expériences aléatoires, on a encore la probabilité uniforme sur l'expérience aléatoire totale.

Proposition 14 *Soit $\Omega = E \times F$ où E est de cardinal n et F de cardinal p. Supposons que l'on choisisse avec la probabilité uniforme un élément de E, et, de manière indépendante, un élément de F toujours avec la probabilité uniforme. Alors chaque élément $\omega = (x, y)$ de Ω a la même probabilité, qui vaut*

$$P(\omega) = P((x, y)) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{1}{np} = P_E(\{x\})P_F(\{y\})$$

Exemple 15 *On lance une pièce de monnaie équilibrée et un dé équilibré.*

$$\Omega = \{P, F\} \times \{1, ..., 6\}$$

Comme on a la probabilité uniforme sur $\{P, F\}$ et sur $\{1, ..., 6\}$, on a finalement la probabilité uniforme sur Ω et

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad P(\omega) = \frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)} = 1/12$$

Proposition 16 *On répète N fois, de manière indépendante, la même expérience aléatoire modélisée par un univers Ω et par une probabilité P. Alors le nouvel univers est $\Omega^N = \Omega \times \cdots \Omega$, et la probabilité associée est*

$$P^N\Big((\omega_1, ..., \omega_N)\Big) = P(\omega_1) \cdots P(\omega_N)$$

En particulier, si P est la probabilité uniforme sur Ω, alors P^N est la probabilité uniforme sur Ω^N.

Le chevalier de Méré :
le Chevalier de Méré avait constaté qu'il obtenait plus souvent 11 que 12 avec trois dés. Pourtant, le nombre de combinaisons dont la somme fait 12 est le même que le nombre de combinaisons dont la somme fait 11. Alors ?

1.6 Exercices

Exercice 1 – Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles :
1) On lance un dé.
2) On lance 2 dés.
3) On tire trois cartes dans un jeu .
4) On place les 5 lettres qui forment "proba" au hasard sur une réglette de Scrabble.
5) On place les 6 lettres qui forment "erreur" au hasard sur une réglette de Scrabble.

Exercice 2 – Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et deux événements A et B. On suppose que

$$P(A \cup B) = 7/8, \qquad P(A \cap B) = 1/4, \qquad P(A) = 3/8.$$

Calculer $P(B)$, $P(A \cap B^c)$, $P(B \cap A^c)$.

Exercice 3 – Supposons que les faces d'un dé sont truquées de telle manière que les numéros impairs ont chacun la même chance d'apparaître, chance qui est deux fois plus grande que pour chacun des numéros pairs. On jette le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ?

Exercice 4 – Un parking contient douze places alignées. Huit voitures s'y sont garées au hasard, et l'on observe que les quatre places libres se suivent. Est-ce surprenant ?

Exercice 5 — La probabilité qu'un objet fabriqué à la chaîne ait un défaut est de $0,01$. Trouver la probabilité que, dans un lot de 100 objets, il y ait au moins un objet défectueux. Quelle est la probabilité qu'il y ait, dans un tel lot, exactement un objet défectueux ?

Exercice 6 – Soient M_1, M_2, M_3 trois personnes. La première M_1 dispose d'une information codée sous forme $+$ ou $-$. Elle la transmet à la deuxième personne M_2. Puis M_2 la transmet à M_3. Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité p que l'information soit changée en son contraire. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que M_3 ait le bon message ?
Et si M_3 transmet l'information dont il dispose à une quatrième personne M_4, quelle est la probabilité pour que M_4 ait la bonne information ?
Lorsque $p = 0.2$, quelle est la valeur numérique de cette probabilité ?

Exercice 7 — Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.
1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte, d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 8 — Dans une usine, la machine A fabrique 60% des pièces, dont 2% sont défectueuses.
La machine B fabrique 30% des pièces, dont 3% sont défectueuses.
La machine C fabrique 10% des pièces, dont 4% sont défectueuses.
1. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On tire une pièce au hasard dans la fabrication. Elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ? par la machine B ? par la machine C ?

Exercice 9 — Dans une jardinerie : 25% des plantes ont moins d'un an, 60% ont de 1 à 2 ans, 25% ont des fleurs jaunes, 60% ont des fleurs roses, 15% ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3% ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15% de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15% de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.
On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie.
1. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins d'un an et des fleurs roses ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait des fleurs roses, sachant qu'elle a plus de 2 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de deux ans et des fleurs jaunes ?

Exercice 10 — Deux chauffeurs de bus se relaient sur la même ligne. Lors d'une grève, le premier a 60% de chances de faire grève et le second 80%. Pendant la prochaine grève, quelle est la probabilité pour qu'un seul des deux chauffeurs fasse grève ?

Exercice 11 — Une loterie comporte 500 billets dont deux seulement sont gagnants. Combien doit-on acheter de billets pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à 0.5 ?

Exercice 12 — 1. Dans une classe de 36 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ? (on considèrera que l'année compte 365 jours, et que toutes les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables).
2. Généraliser ce résultat pour une classe de n élèves. Tracer le résultat obtenu.

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes

Le travail sur les événements devient vite fastidieux, ainsi nous allons maintenant nous restreindre à étudier des grandeurs numériques obtenues pendant l'expérience aléatoire.

2.1 Définitions

Définition 17 *Une variable aléatoire (v.a.) X est une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque événement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$.*

Exemple 18 *On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X de fois ou PILE apparaît. Il y a deux manières de formaliser cette phrase. Tout d'abord, à chaque événement élémentaire ω, on associe $X(\omega)$. Ainsi,*

ω	*PPP*	*PPF*	*PFP*	*FPP*	*FFP*	*FPF*	*PFF*	*FFF*
valeur de X	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*0*

Ensuite, comme on observe que plusieurs événements élémentaires donnent la même valeur, on peut les regrouper et obtenir des événements (événement = réunion d'événements élémentaires) qui correspondent à des valeurs distinctes de X :

k (valeur prise par X)	3	2	1	0
événement $[X = k]$	*{PPP}*	*{PPF,PFP,FPP}*	*{PFF,FPF,FFP}*	*{FFF}*

On peut d'emblée observer que les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont deux à deux disjoints. De plus, la réunion de ces événements est Ω.

Il est aisé de voir que pour toute v.a., **les événements correspondant à des valeurs distinctes de X sont incompatibles**. Autrement dit, dès que $i \neq j$, les événements $(X = i)$ et $(X = j)$ sont incompatibles : $(X = i) \cap (X = j) = \emptyset$. De plus, **la réunion de ces événements forme l'espace Ω tout entier** :

$$\bigcup_k (X = k) = \Omega$$

Une variable qui ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs est dite **discrète**, sinon, elle est dite **continue** (exemples : hauteur d'un arbre, distance de freinage d'une voiture roulant à 100 km/h). Les v.a. continues seront étudiées plus tard.

Définition 19 *La loi d'une variable aléatoire discrète X est la liste de toutes les valeurs différentes que peut prendre X avec les probabilités qui leur sont associées. On utilisera souvent une formule, plutôt qu'une liste.*

Exemple 18 : nous avons déjà la liste de tous les événements élémentaires et ils sont équiprobables, de probabilité 1/8. D'après la composition des événements $[X = k]$, pour $k = 0, ..., 3$, on peut déduire facilement la loi de X.

valeur de X (événement)	$[X = 3]$	$[X = 2]$	$[X = 1]$	$[X = 0]$
composition de l'événement	{PPP}	{PPF,PFP,FPP}	{PFF,FPF,FFP}	{FFF}
probabilité	1/8	3/8	3/8	1/8

Un autre outil permet de caractériser la loi d'une v.a. : il s'agit de la fonction de répartition empirique.

Définition 20 *Soit X une v.a.. On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Exemple : X est le nombre de Face quand on lance trois fois une pièce. On a vu que la loi de X est

$$P[X = 0] = 1/8, \qquad P[X = 1] = P[X = 2] = 3/8, \qquad P[X = 3] = 1/8$$

D'où,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Remarque : deux v.a. ayant même loi ont même fonction de répartition.

Proposition 21 *Soit F une fonction de répartition. Alors*
1) F est croissante,
2) F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,
3)

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Pour une v.a. discrète, la fonction de répartition est une fonction en escalier, avec un saut en chaque valeur k de $X(\Omega)$ et la hauteur de ces sauts est la probabilité $P(X = k)$.

Une fois la loi d'une v.a. établie, on peut calculer, comme pour une série statistique, un indicateur de position (l'espérance) et un indicateur de dispersion (la variance).

Définition 22 *L'espérance ou moyenne d'une v.a. discrète X est le réel*

$$E[X] = \sum_k kP[X = k]$$

où on somme sur toutes les valeurs k que peut prendre X.

Un résultat remarquable permet de calculer facilement l'espérance d'une fonction de X connaissant la loi de X : c'est le **théorème du transfert**.

Théorème 23 *Pour toute fonction g,*

$$E[g(X)] = \sum_k g(k)P[X = k]$$

preuve : observons que $g(X) = y$ ssi $X = x$ avec $g(x) = y$. Ainsi,

$$P(g(X) = y) = \sum_{x:g(x)=y} P(X = x)$$

Multiplions cette égalité par y puis sommons :

$$E(Y) = \sum_y yP(Y = y) = \sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)P(X = x) = \sum_x g(x)P(X = x)$$

□

Définition 24 *La variance d'une v.a. discrète X est le réel positif*

$$\mathrm{Var}(X) = E\Big[(X - E[X])^2\Big] = \sum_k (k - E[X])^2 P[X = k] = E[X^2] - E[X]^2$$

et l'écart-type de X est la racine carrée de sa variance.

Remarque : l'espérance n'a pas toujours un sens quand $X(\Omega)$ est infini. Dans ce cas, X a une espérance si

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k|P(X = k) < \infty$$

L'espérance d'une v.a. est la moyenne des valeurs que peut prendre X, pondérée par les probabilités de ces valeurs. On appelle souvent l'espérance tout simplement moyenne de X : elle correspond à une valeur moyenne autour de laquelle sont réparties les valeurs que peut prendre X. L'écart-type (ou la variance) mesure la dispersion de la v.a. X autour de sa valeur moyenne $E[X]$.

L'espérance et sa variance ne dépendent de X qu'à travers sa loi : deux variables qui ont même loi ont même espérance, même variance.

Exemple 18 : nous avons la loi du nombre X de PILE quand on lance trois fois une pièce.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{3} kP[X = k] = 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\
\mathrm{Var}(X) &= E[X^2] - E[X]^2 = \sum_{k=0}^{3} k^2 P[X = k] - E[X]^2 \\
&= 3^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 0^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Fréquences empiriques VERSUS loi de probabilité

Il ne faut pas confondre les fréquences observées sur un échantillon et la loi de probabilité. Reprenons l'exemple 18. J'ai fait l'expérience de lancer 10 fois trois pièces de monnaie en relevant à chaque fois le nombre de PILE obtenus. Voici les fréquences observées :

nbr de PILE	$[X = 3]$	$[X = 2]$	$[X = 1]$	$[X = 0]$
probabilité	0.125	0.375	0.375	0.125
fréquence observée	0.2	0.6	0.1	0.1

Quand le nombre d'essais augmente, les fréquences observées sont de plus en plus proches des valeurs théoriques données par la loi de probabilité (preuve plus tard). C'est pourquoi, quand on ne peut pas déterminer la loi d'une v.a. aussi facilement que dans cet exemple, on considère que les fréquences empiriques (c'est-à-dire mesurées sur un échantillon) sont des valeurs approchées des probabilités. Il n'en reste pas moins qu'il ne faut pas assimiler ces deux objets, et bien comprendre la différence entre la moyenne théorique, calculée à partir de la loi de probabilité, et la moyenne empirique, calculée à partir de quelques observations.

2.2 Indépendance et conditionnement

Définition 25 *Deux v.a. X et Y sont dites indépendantes si, pour tous i et j, les événements $\{X = i\}$ et $\{Y = j\}$ sont indépendants, ie*

$$P[X = i, Y = j] = P[X = i]P[Y = j]$$

Attention ! Si X et Y ne sont pas indépendantes, connaître la loi de X et celle de Y ne suffit pas pour connaître la loi de (X, Y), qui est la donnée, pour tous i et j, de $P[(X, Y) = (i, j)] = P[X = i, Y = j]$.

Proposition 26 (La formule des probabilités totales) *Soient X et Y deux v.a.. Pour tout $i \in X(\Omega)$,*

$$P[X = i] = \sum_{j \in Y(\Omega)} P[X = i|Y = j]P[Y = j]$$

preuve : on peut appliquer la formule des probabilités totales 9 car les événements $Y = j$ forment une partition de Ω. □

Exemple 27 *On lance deux dés équilibrés et on note X et Y les deux chiffres obtenus. Soit $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?*

Méthode 1 : bien sûr, dans ce cas fini, on peut faire un tableau à double entrée avec la valeur que prend X, la valeur que prend Y et la valeur de Z.

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les deux dés ne se téléphonent pas avant de décider sur quelle face ils vont tomber : leurs résultats sont indépendants. Donc

$$\text{pour tous } 1 \leq i, j \leq 6, \qquad P[X = i, Y = j] = P[X = i]P[Y = j] = 1/36$$

Autrement dit, chaque case du tableau a la même probabilité 1/36. On en déduit : $P[Z = 2] = P[Z = 12] = 1/36$, $P[Z = 3] = P[Z = 11] = 2/36$, $P[Z = 4] = P[Z = 10] = 3/36$, $P[Z = 5] = P[Z = 9] = 4/36$, $P[Z = 6] = P[Z = 8] = 5/36$, $P[Z = 7] = 6/36$. On vérifie immédiatement que la somme de ces probabilité fait 1.

Méthode 2 : on utilise la formule des probabilités totales. Précisément, on conditionne par les événements $(X = i)$ $(1 \leq i \leq 6)$, qui forment une partition de Ω, car quand on connaît la valeur que prend X, on peut facilement calculer la probabilité pour avoir $Z = j$. Soit $1 \leq j \leq 12$.

$$\begin{aligned} P[Z = j] &= \sum_{i=1}^{6} P[Z = j | X = i]P[X = i] \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P[X + Y = j | X = i] \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P[Y = j - i | X = i] \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P[Y = j - i] \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que X et Y sont indépendants. Il suffit maintenant de se rappeler que $P[Y = k] = 1/6$ seulement si k est dans $\{1, ..., 6\}$.

Théorème 28 *1) Pour toutes v.a. X et Y, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.*
2) Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

preuve : pour le premier point, il faut observer que

$$\sum_y P(X = x, Y = y) = P\Big((X = x) \cap (\cup_y (Y = y))\Big) = P\Big((X = x) \cap \Omega\Big) = P(X = x)$$

et il vient

$$\begin{aligned}
E[X+Y] &= \sum_{x,y}(x+y)P(X=x,Y=y) \\
&= \sum_{x,y} xP(X=x,Y=y) + \sum_{x,y} yP(X=x,Y=y) \\
&= \sum_{x} xP(X=x) + \sum_{y} yP(Y=y) = E[X]+E[Y]
\end{aligned}$$

Pour le second point, on montre tout d'abord que $E(XY) = E(X)E(Y)$, la suite venant facilement. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \sum_{x,y} xyP(X=x,Y=y) \\
&= \sum_{x,y} xyP(X=x)P(Y=y) \\
&= \Big(\sum_{x} xP(X=x)\Big)\Big(\sum_{y} yP(Y=y)\Big) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

2.3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie que les expériences aléatoires qui n'ont que **deux issues possibles** (ex : un patient à l'hôpital survit ou non, un client signe le contrat ou non, un électeur vote démocrate ou républicain...). Considérons une expérience aléatoire de ce type. On l'appelle une **épreuve de Bernoulli**. Elle se conclut par un succès si l'événement auquel on s'intéresse est réalisé ou un échec sinon. On associe à cette épreuve une variable aléatoire Y qui prend la valeur 1 si l'événement est réalisé et la valeur 0 sinon. Cette v.a. ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P[Y=1]=p, \qquad P[Y=0]=q=1-p$$

On dit alors que Y suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p, notée $\mathcal{B}(p)$. La v.a. Y a pour espérance p et pour variance $p(1-p)$. En effet, $E[Y] = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ et $\mathrm{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[Y] - E[Y]^2 = p(1-p)$.

Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois de la même épreuve dans les mêmes conditions.

Schéma de Bernoulli :

1) Chaque épreuve a deux issues : succès [S] ou échec [E].

2) Pour chaque épreuve, la probabilité d'un succès est la même, notons $P(S) = p$ et $P(E) = q = 1-p$.

3) Les n épreuves sont indépendantes : la probabilité d'un succès ne varie pas, elle ne dépend pas des informations sur les résultats des autres épreuves.

Soit X la v.a. qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** (n, p), notée $\mathcal{B}(n, p)$. Cette loi est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{pour tout } 0 \leq k \leq n$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
En effet, on peut tout d'abord observer que le nombre de succès est un entier nécessairement compris entre 0 et le nombre d'épreuves n. D'autre part, l'événement $\{X = k\}$ est une réunion d'événements élémentaires et chacun de ces événements élémentaires est une suite de longueur n de la forme $\omega =$[SSES...E] avec k S et $n - k$ E. Un tel événement élémentaire a la probabilité

$$P(\omega) = p^k (1-p)^{n-k}$$

Combien existe-t-il de suites à n éléments avec k S et $n - k$ E ?
Il en existe $\binom{n}{k}$, le nombre de combinaisons de k S parmi n éléments. Finalement,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\omega : X(\omega) = k} P(\omega) \\ &= \operatorname{card}(\{\omega : X(\omega) = k\}) \; p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Proposition 29 *Si X est une v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p)$, l'espérance de X vaut np et sa variance $np(1-p)$.*

(preuve)

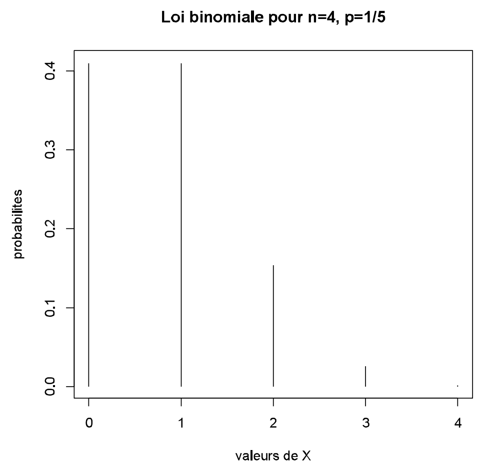
Exemple 30 (échantillon avec remise) *On considère une population avec deux catégories d'individus, A et B. On choisit de manière équiprobable un individu dans la population. On note le résultat de l'épreuve, c'est-à-dire si l'individu appartient à la catégorie A ou B. Puis on le remet dans le lot et on recommence : on choisit à nouveau un individu dans la population... Cela constitue notre schéma de Bernoulli.*
Supposons que les individus de la catégorie A sont en nombre N_A dans la population qui contient N individus. Alors pour chaque épreuve de Bernoulli, la probabilité d'avoir un individu de la catégorie A (ce que nous appellerons un succès) est $p = N_A/N$. Le nombre d'individus, présents dans l'échantillon, qui appartiennent à la catégorie A est une variable aléatoire, car sa valeur dépend du choix de l'échantillon, c'est-à-dire de l'expérience aléatoire.

Quel est le nombre X d'individus de la catégorie A dans l'échantillon ? D'après ce qu'on vient de voir, on est en présence d'un schéma de Bernoulli où N_A/N est la probabilité de succès et n est le nombre d'épreuves : une épreuve est le tirage d'un individu et un succès correspond à l'événement "l'individu appartient à la catégorie A". Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, N_A/N)$.

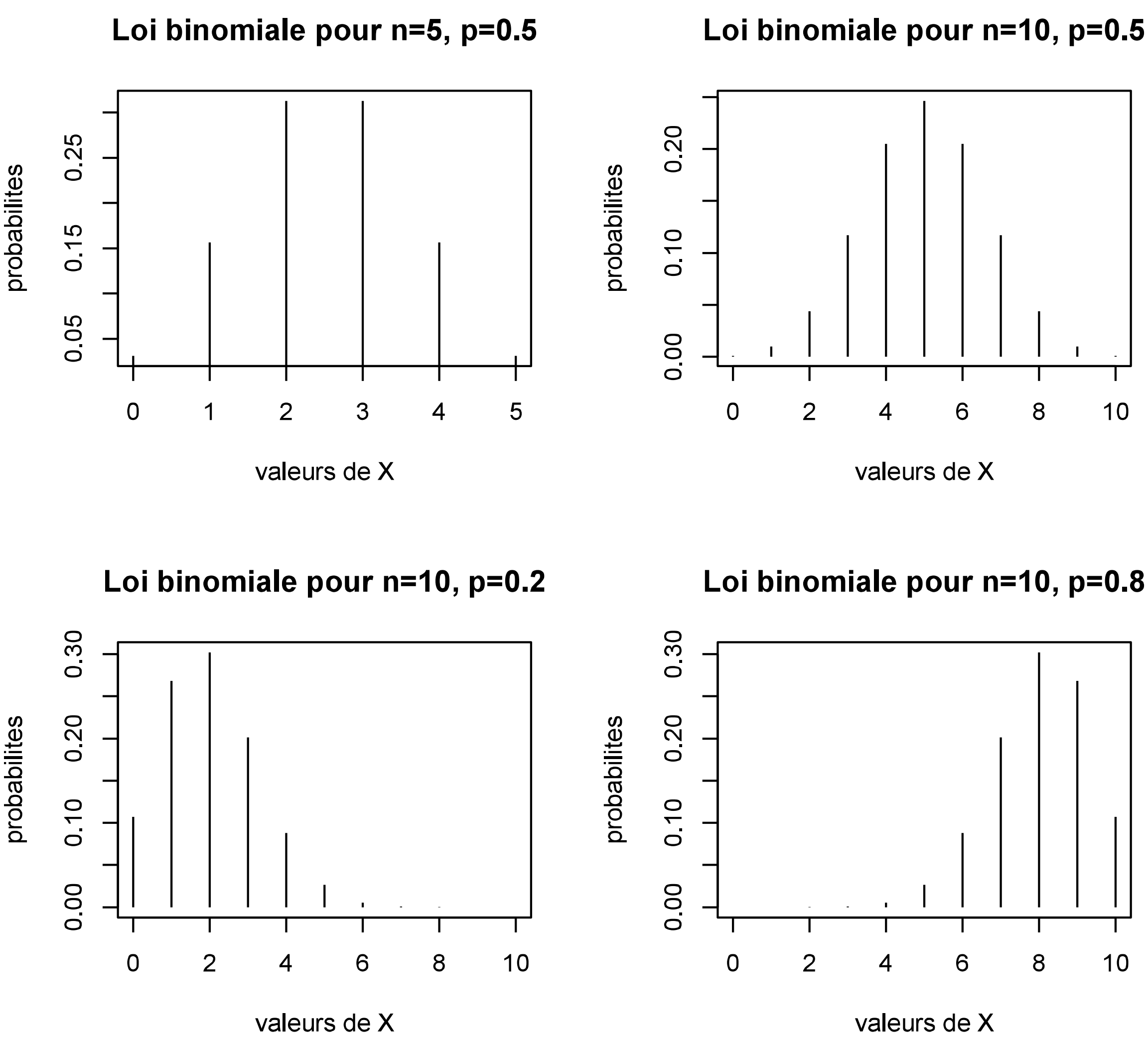
Exemple 31 *On s'intéresse à l'infection des arbres d'une forêt par un parasite. Soit p la proportion d'arbres infectés. On étudie 4 arbres. Si un arbre est infecté, on dit qu'on a un succès, sinon un échec. Soit X le nombre d'arbres infectés, parmi les 4. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4,p)$.*

$P(X=0) = \binom{4}{0}\ q^4 = q^4,$
$P(X=1) = \binom{4}{1}\ p^1q^3 = 4pq^3,$
$P(X=2) = \binom{4}{2}\ p^2q^2 = 6p^2q^2,$
$P(X=3) = \binom{4}{3}\ p^3q^1 = 4p^3q,$
$P(X=4) = \binom{4}{4}\ p^4 = p^4.$

Pour $p = 1/5$, on obtient les valeurs :



Voici d'autres exemples.



Remarque : associons à chaque épreuve de Bernoulli une v.a. Y_i $(1 \leq i \leq n)$ qui vaut 1 si on observe un succès au i-ème essai et 0 sinon. Alors le nombre de succès, noté X, vérifie

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Autrement dit, une v.a de loi $\mathcal{B}(n,p)$ est une somme de n v.a indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 32 *Un nouveau traitement résout le problème de fragilité d'un matériel dans 50% des cas. Si on essaye sur 15 objets, quelle est la probabilité pour qu'au plus 6 de ces objets soient résistants, pour que le nombre d'objets résistants soit compris entre 6 et 10, pour que deux au plus restent fragiles. Quel est le nombre moyen d'objets rendus résistants par le traitement ?*

On suppose que les résultats concernant les 15 objets sont indépendants. Soit X le nombre d'objets résistants à la suite du nouveau traitement. Alors X suit une loi $\mathcal{B}(15, 0.5)$ et

$$\begin{aligned}
P[X \leq 6] &= P[X=0] + P[X=1] + \cdots + P[X=6] \\
&= \frac{1}{2^{15}}\left(\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5} + \binom{15}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2^{15}}(1 + 15 + 105 + 455 + 1365 + 3003 + 5005) \\
&= 0.304
\end{aligned}$$

$$P[6 \leq X \leq 10] = P[X=6] + P[X=7] + P[X=8] + P[X=9] + P[X=10] = 0.790$$

$$\begin{aligned}
P[X \geq 12] &= P[X=12] + P[X=13] + P[X=14] + P[X=15] \\
&= (455 + 105 + 15 + 1)/2^{15} \\
&= 0.018
\end{aligned}$$

Enfin, $E[X] = 15/2 = 7,5$.

2.4 Trois autres lois discrètes

2.4.1 Loi géométrique

Au lieu de réaliser un nombre fixé d'essais lors d'un schéma de Bernoulli, l'expérimentateur s'arrête au premier succès. La valeur qui nous intéresse est le nombre d'essais effectués jusqu'au premier succès inclus. Le nombre de succès est donc fixé à 1, mais le nombre d'essais total Y est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entière supérieure ou égale à 1. De plus,

$$\forall k = 1, 2, \ldots \qquad P[Y = k] = p(1-p)^{k-1}$$

où p est toujours la probabilité de succès des épreuves de Bernoulli. On dit alors que Y suit la **loi géométrique de paramètre** p, notée $\mathcal{G}(p)$.

Proposition 33 *L'espérance de Y vaut $1/p$ et sa variance $(1-p)/p^2$.*

preuve : admettons tout d'abord que, sur $[0, 1[$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

D'où, pour $x = 1 - p$,

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} kP[X = k] = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p/p^2 = 1/p$$

Un calcul analogue permet de calculer la variance (exercice).

2.4.2 Loi de Poisson

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand np est petit et n grand (en pratique, $n \geq 50$ et $np \leq 10$). Une v.a. X de loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P[X = k] = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$$

L'espérance et la variance de X sont égales à λ.

On utilise la loi de Poisson pour modéliser le nombre de tâches qui arrivent à un serveur informatique pendant une minute, le nombre de globules rouges dans un ml de sang, le nombre d'accidents du travail dans une entreprise pendant un an...
Dans le cas de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = np$.

2.4.3 Loi uniforme

Mis à part le prestige dû à son nom, la loi uniforme est la loi de l'absence d'information. Supposons qu'une v.a. X prenne les valeurs 1,2,...,n, mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de X ; dans ce cas, après justification, on peut affecter à chaque valeur le même poids : $1/n$. Et

$$\forall k = 1, ..., n, \quad P[X = k] = \frac{1}{n}$$

On montre facilement que

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

Exercice 2 — Soit X une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X = -1] = 0.2, \qquad P[X = 0] = 0.1, \qquad P[X = 4] = 0.3, \qquad P[X = 5] = 0.4$$

Calculer $P[X \leq 3]$, $P[X > 2]$, l'espérance et la variance de X.

2.5 Exercices

Exercice 1 — Soit X une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X=-1]=0.2, \qquad P[X=0]=0.1, \qquad P[X=4]=0.3, \qquad P[X=5]=0.4$$

Calculer $P[X \leq 3]$, $P[X > 2]$, l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 — On lance deux dés. Modéliser l'expérience. Quelle est la probabilité pour obtenir au moins un 4 ? Quelle est la probabilité pour que le plus petit donne un nombre inférieur ou égal à 4 ? Quelle est l'espérance de la somme des deux dés ?

Exercice 3 — On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une va qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Calculer $P[X = k]$ pour $k = 0, ..., 6$. Faire une représentation graphique. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 accidents lors d'un jour donné ?

Exercice 4 — Pour ces expériences aléatoires, donner les espaces fondamentaux Ω et les probabilités qui les décrivent. Puis, pour chacune des variables aléatoires que l'on étudie, préciser le nom de la loi, ses paramètres et donner l'expression de $P(X = k)$.
a) On lance un dé 20 fois. Quelle est la loi du nombre de 5 obtenus ? Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 3 fois un 5 ?
b) Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches dans l'urne ?
c) On recommence ce petit jeu. Quelle est la nouvelle loi du nombre de boules blanches dans l'urne ? Donner aussi la loi du nombre de boules noires et son espérance.
d) Au bord de l'A7, un étudiant fait du stop. En cette saison, un vingtième des automobilistes s'arrête pour prendre un stoppeur. Quelle est la loi du nombre de véhicules que l'étudiant verra passer avant qu'il ne trouve un chauffeur ? Quelle est la probabilité qu'il monte dans la quatrième voiture qui passe ? Quelle est la probabilité qu'il voit passer au moins 6 voitures qui ne s'arrêtent pas ?

Exercice 5 — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n', p)$. Quelle est la loi de la somme $X + Y$?

Exercice 6 — Un ingénieur d'une entreprise de télécommunication recherche en milieu rural des sites pour implanter des relais pour téléphones portables. Ces sites sont des clochers d'église, châteaux d'eau... Sur une carte IGN, l'ingénieur relève 250 sites potentiels dans sa région. De plus, il utilise le quadrillage de sa carte : sa région est divisée en 100 carreaux. On suppose que les sites potentiels sont répartis uniforménent et indépendamment sur le territoire. Étant donné un carreau, quelle est la loi du nombre de sites situés dans ce carreau ? Quelle est la probabilité pour qu'on trouve 5 sites dans ce carreau ? Plus de 5 sites ?

Exercice 7 — Déterminer la loi de la somme de deux v.a. indépendantes de loi de Poisson.

Exercice 8 — Un filtre à particules reçoit un flux de particules, dont le nombre par unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre λ. Il filtre ce flux de telle sorte que les particules non toxiques sont rejetées dans l'air. Ces particules non toxiques sont présentes en proportion p dans le gaz originel. Quelle est la loi du nombre de particules rejetées dans l'air par unité de temps ?

Exercice 9 — Un géologue cherche 5 sites potentiels pour exploiter un gisement d'uranium. Après les études de faisabilité, le conseil d'administration choisira le site définitif. Notre géologue charge donc 5 subordonnés de trouver 5 sites vérifiant certaines caractéristiques. Chaque lundi, les employés présentent, lors d'une réunion de travail, un site chacun. On met de côté les sites qui pourraient convenir à première vue. Ces sites seront alors soumis aux études de faisabilité par les employés qui les ont dénichés et on renvoie les autres sur le terrain, jusqu'à ce qu'ils trouvent un site correct.
Soient X la v.a. égale au nombre de lundis de présentation et Y la v.a. égale au nombre de sites présentés.
Calculer $P[X \leq k]$ puis $P[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Puis déterminer la loi de Y.

Chapitre 3

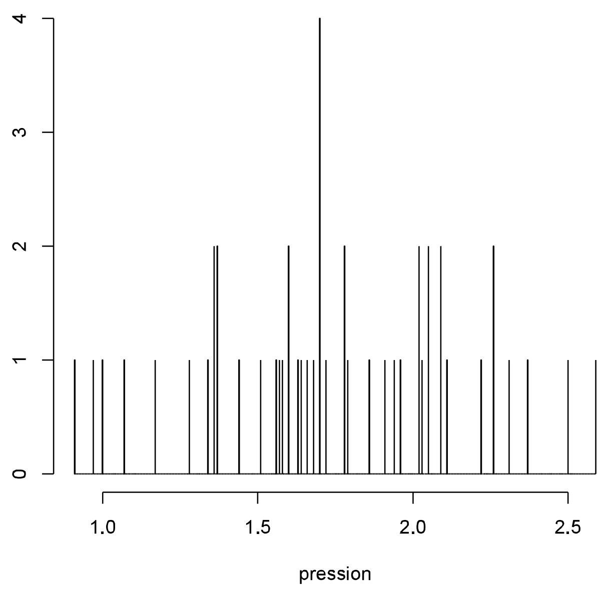
Variables aléatoires continues

On utilise des v.a. discrètes pour compter des événements qui se produisent de manière aléatoire, et des v.a. continues quand on veut mesurer des grandeurs “continues” (distance, masse, pression...).

3.1 Loi d’une v.a. continue

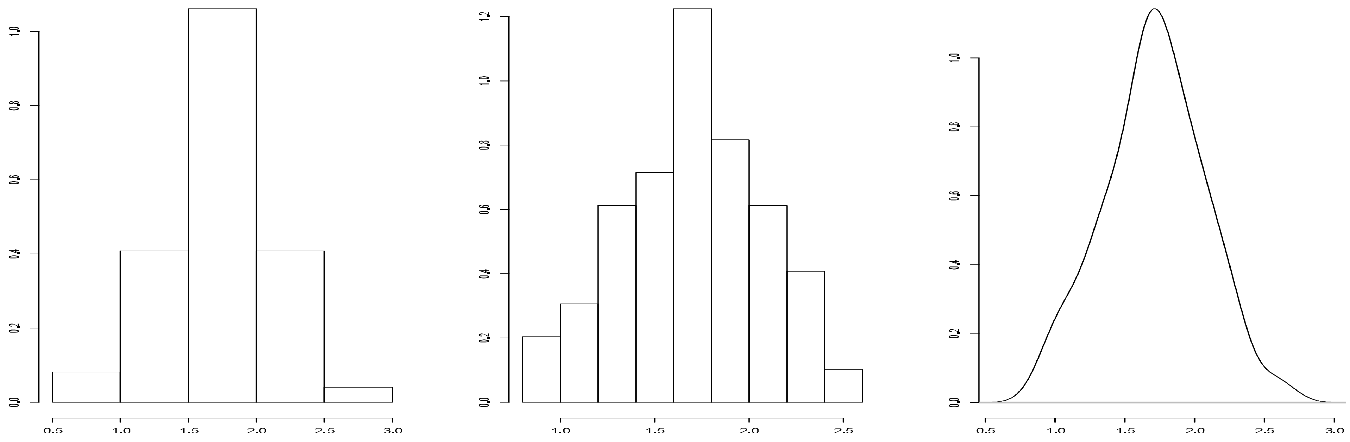
Un industriel fait relever régulièrement la pression dans une cuve de réaction chimique. Voici les mesures obtenues en bar :

2.50	1.37	1.57	1.28	1.64	1.37	2.05	2.11	1.00	1.72
1.96	1.70	2.03	2.26	1.60	1.70	2.09	1.79	1.66	2.09
1.58	1.78	2.02	2.22	1.51	2.59	1.94	1.36	2.31	1.36
0.97	1.07	0.91	2.05	1.70	1.70	1.17	2.02	2.26	1.78
1.60	1.63	1.68	1.34	1.56	1.91	1.86	1.44	2.37	



Cette représentation graphique n’est pas pertinente : on regroupe les valeurs pour tracer un histogramme.

Suivant le nombre de classes choisi, on obtient différents tracés. On peut imaginer de raffiner encore en faisant d’autres mesures avec des instruments de mesure plus précis.



On aurait alors une courbe, d'aire 1 comme les histogrammes, qui représente la manière dont sont réparties les valeurs de la v.a. X (voir les graphes et les données ci-dessus). Cette courbe est la courbe d'une fonction appelée **densité de probabilité** ou simplement **densité**. Une densité f décrit la loi d'une v.a. X en ce sens :

$$\text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \qquad P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P[X \leq x] = P[X < x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u$$

On en déduit qu'une densité doit vérifier

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

Définition 34 *On appelle densité de probabilité toute fonction réelle positive, d'intégrale 1.*

Attention ! Pour une v.a. continue X, la densité f ne représente pas la probabilité de l'événement $\{X = x\}$, car $P[X = x] = 0$. Il faut plutôt garder à l'esprit que

$$P[x \leq X \leq x + \Delta x] = f(x).\Delta x$$

Important : La loi d'une v.a. X est donnée par
- sa densité
ou
- les probabilités $P[a \leq X \leq b]$ pour tous a, b
ou
- les probabilités $F(x) = P[X \leq x]$ pour tout x (F est la fonction de répartition).

Remarque : $P[X = x] = 0$ pour tout x.

Proposition 35 *La fonction de répartition F d'une v.a. X de densité f est continue, croissante. Elle est dérivable en tout point x où f est continue et $F'(x) = f(x)$. On a la relation*

$$P[a \leq X \leq b] = P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

dès que $b \geq a$.

Définition 36 *L'espérance de la v.a. X est définie par*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

quand cette intégrale a un sens. De plus, la variance de X est $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Proposition 37 *(i) L'espérance d'une fonction $Y = \varphi(X)$ est donnée par*

$$E[Y] = E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x$$

(ii) Pour tous réels a et b,

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

(iii) Si X et Y sont deux v.a. continues,

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Si, de plus, elles sont **indépendantes**, $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Exemple : Soit X une v.a. de densité f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une densité ($f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$). Calculons $P[1/3 \leq X \leq 2/3]$. Que valent $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$?

3.2 Loi uniforme

Définition 38 *Une v.a. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, si elle admet pour densité*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \textit{si } a < x < b \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Remarque : on vérifie facilement que f est une densité.
La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

L'espérance de X est $E[X] = (b - a)/2$ et la variance de X est $\mathrm{Var}(X) = (b - a)^2/12$.
Exercice : soit X de loi uniforme sur $[0, 10]$. Calculer $P[X < 3]$, $P[X > 6]$, $P[3 < X < 8]$.

3.3 La loi normale

3.3.1 Loi normale centrée réduite

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique. Elle possède des propriétés intéressantes qui la rendent agréable à utiliser.

Définition 39 *Une v.a. X suit une loi normale (ou loi gaussienne ou loi de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité f est donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Remarque : vérifions que f est d'intégrale 1. Notons $I = \int_{\mathbb{R}} f$.

$$\begin{aligned} I^2 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

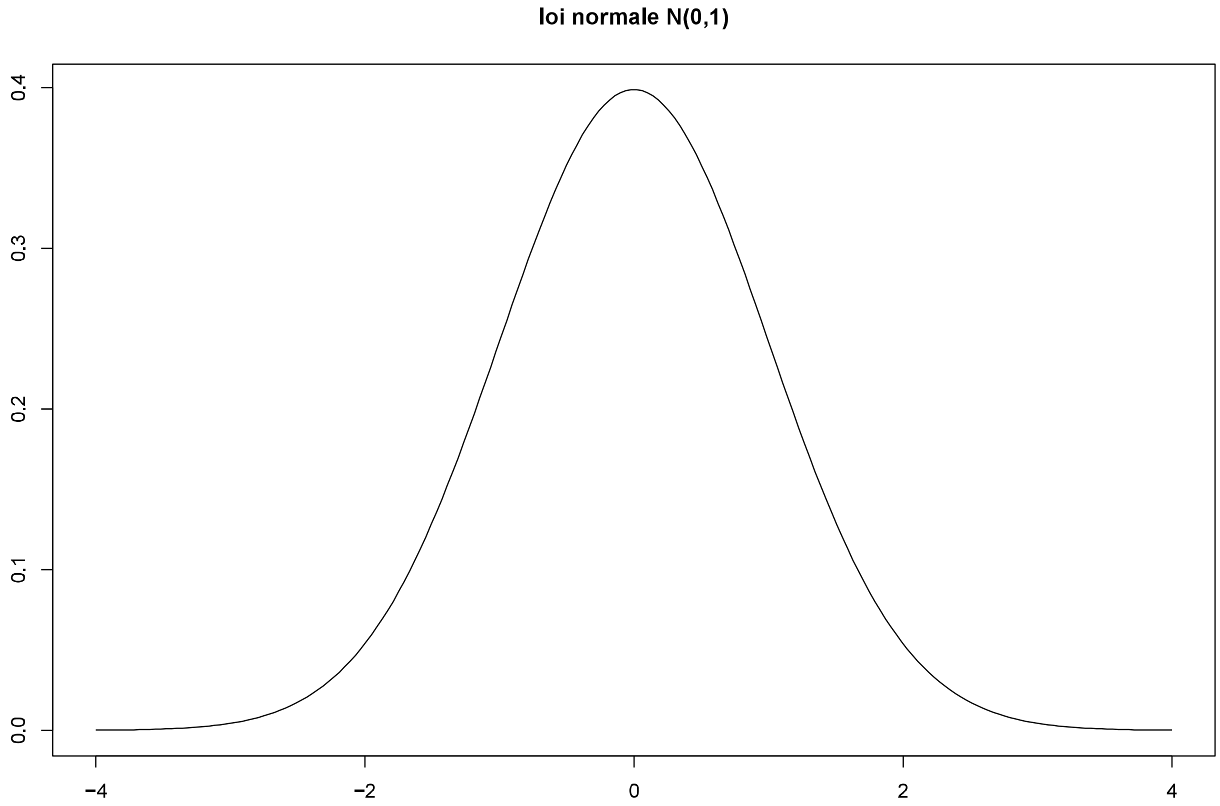
On fait un changement de variable polaire : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ et on obtient :

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2/2) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 1$$

Rappel : si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tous $a < b$,

$$P[a \leq X \leq b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a)$$

où φ est la fonction de répartition de X. Rappelons que φ est une primitive de la densité f. Mais il n'existe pas de forme analytique de la primitive de f. On doit donc lire les valeurs de φ dans une table disponible en annexe B, ou la faire calculer par un logiciel adapté (ex : excel, matlab, R).
La courbe de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ porte le nom de "courbe en cloche". Elle tend vers 0 en l'infini, est croissante sur $\mathbb{R}^-$, puis décroissante. Elle admet donc un maximum en 0. On peut voir aussi qu'elle est symétrique, de centre de symétrie 0.



Proposition 40 *La v.a. X est* **centrée**, *c'est-à-dire de moyenne nulle, et* **réduite**, *c'est-à-dire de variance 1. De plus, $-X$ suit encore une loi normale centrée réduite.*

preuve : le calcul de l'espérance est immédiat quand on a observé que $xf(x)$ est une fonction impaire. Le calcul de la variance se fait par une intégration par parties. Enfin, montrons que X et $-X$ ont même loi. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$P[a \leq -X \leq b] = P[-b \leq X \leq -a] = \int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x$$

On effectue un le changement de variable : $y = -x$

$$P[a \leq -X \leq b] = \int_{a}^{b} f(-y)\mathrm{d}y = \int_{a}^{b} f(y)\mathrm{d}y$$

par symétrie de la fonction f. D'où

$$P[a \leq -X \leq b] = P[a \leq X \leq b]$$

Utilisation des tables

Pour calculer $P[a \leq X \leq b]$ ou $P[X \leq x]$, on a recours au calcul numérique sur ordinateur ou, plus simplement, à une table qui donne $P[X \leq x]$ pour tout décimal positif x à deux chiffres après la virgule. Puis il faut remarquer que

$$P[a \leq X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a]$$

puis on lit les probabilités dans la table si a et b sont positifs. Pour trouver $P[X \leq -x]$ quand $x > 0$, on utilise le fait que X et $-X$ ont même loi :

$$P[X \leq -x] = P[-X \geq x] = P[X \geq x] = 1 - P[X \leq x]$$

Exemple : on cherche à calculer $P[1 \leq X \leq -1]$.

$$\begin{aligned} P[-1 \leq X \leq 1] &= P[X \leq 1] - P[X \leq -1] = P[X \leq 1] - \Big(1 - P[X \leq 1]\Big) \\ &= 2P[X \leq 1] - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0,6826 \end{aligned}$$

Exemple : on cherche $u \in \mathbb{R}$ tel que $P[-u \leq X \leq u] = 0.90$.

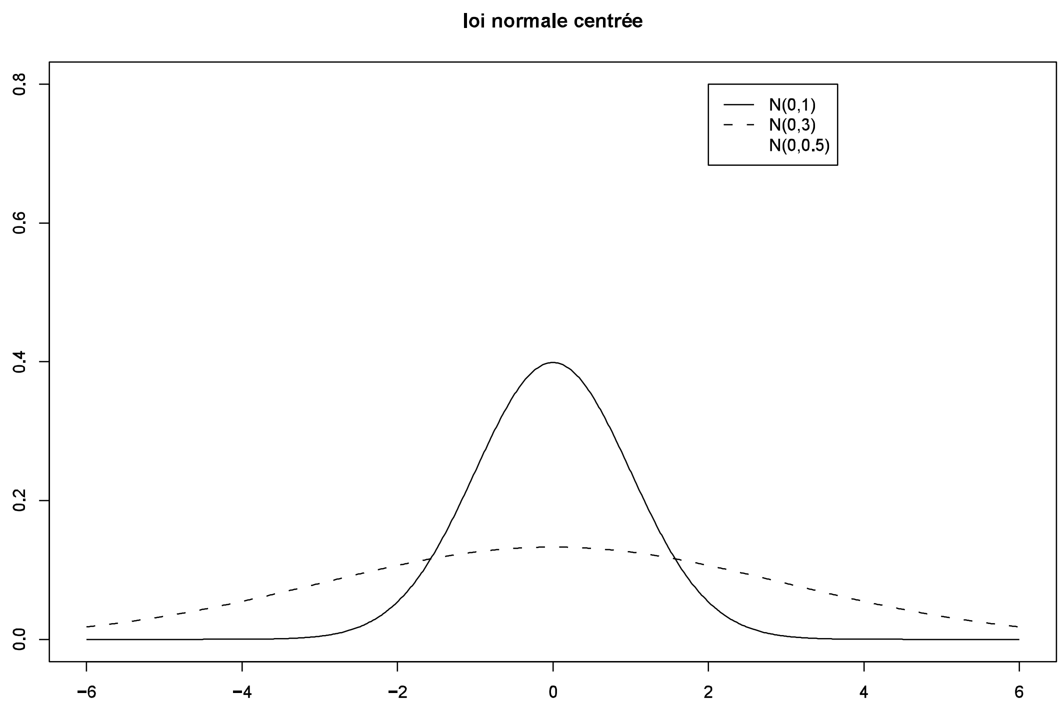
$$P[-u \leq X \leq u] = 2P[X \leq u] - 1$$

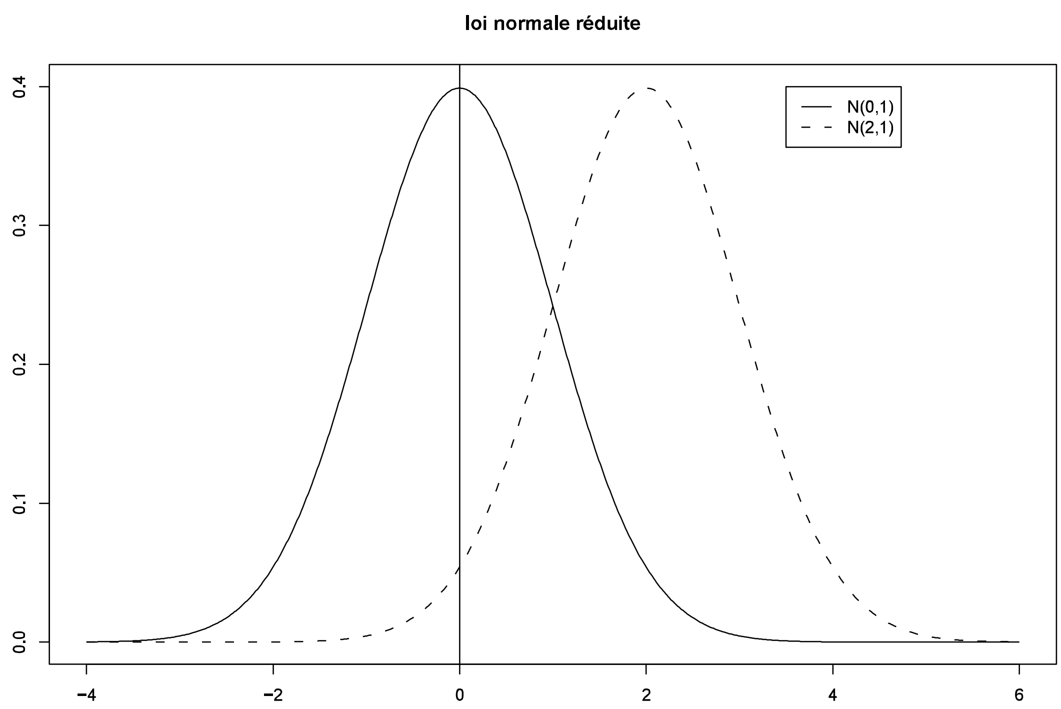
D'où $P[X \leq u] = 0.95$ et $u = 1.6446$.

3.3.2 Loi normale : cas général

Proposition 41 *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une v.a. X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa densité f est donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$





Proposition 42 *Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.*

preuve : soient deux réels $a < b$.

$$\begin{aligned} P[a \leq Z \leq b] &= P\left[a \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq b\right] \\ &= P[m + a\sigma \leq X \leq m + b\sigma] \\ &= \int_{m+a\sigma}^{m+b\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Changement de variable : $z = \frac{x-m}{\sigma}$

$$P[a \leq Z \leq b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big)\mathrm{d}z$$

Cette égalité étant vraie pour tous réels $a < b$, on en déduit que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big)$ est la densité de Z, autrement dit, Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. □

Proposition 43

$$E[X] = m \textit{ et } \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

preuve : immédiat avec la proposition précédente et la linéarité de l'espérance. □

On peut ainsi facilement se ramener à la loi normale centrée réduite. Comme la fonction de répartition φ de la loi normale centrée réduite est tabulée, on se ramènera même systématiquement à cette loi pour calculer des probabilités. Plus précisément, si X est de loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$, et a et b sont deux réels, on calcule $P[a \leq X \leq b]$ ainsi :

$$P[a \leq X \leq b] = P\left[\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right] = P\left[\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right]$$

où Z est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$P[a \leq X \leq b] = \varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

On peut aussi remarquer que si Z est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $-Z$ aussi et donc, pour $u > 0$,

$$\begin{aligned} P[-u \leq Z \leq u] &= P[Z \leq u] - P[Z \leq -u] = P[Z \leq u] - P[Z \geq u] \\ &= P[Z \leq u] - (1 - P[Z \leq u]) = 2P[Z \leq u] - 1 \end{aligned}$$

Exemple : Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(15,4)$. Quelle est la probabilité $P[10 \leq X \leq 22]$?

$$P[10 \leq X \leq 22] = P\Big[\frac{10-15}{4} \leq \frac{X-15}{4} \leq \frac{22-15}{4}\Big] = P[-1.25 \leq Y \leq 1.75]$$

où Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi,

$$P[10 \leq X \leq 22] = P[Y \leq 1.75] + P[Y \leq 1.25] - 1 = 0.9599 + 0.8944 - 1 = 0.8543$$

Important
Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned} P[-1 \leq Y \leq 1] &= 0.6826 \\ P[-2 \leq Y \leq 2] &= 0.9544 \\ P[-3 \leq Y \leq 3] &= 0.9973 \end{aligned}$$

Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$.

$$\begin{aligned} P[m-\sigma \leq X \leq m+\sigma] &= 0.6826 \\ P[m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma] &= 0.9544 \\ P[m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma] &= 0.9973 \end{aligned}$$

3.4 La loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif.

Définition 44 *Une v.a. X est dite de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ si sa densité est donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La v.a. X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ ne prend que des valeurs positives.
Elle est utilisée dans de nombreuses applications :
- durée de fonctionnement d'un matériel informatique avant la première panne,
- désintégration radioactive,
- temps séparant l'arrivée de deux “clients” dans un phénomène d'attente (guichet, accès à un serveur informatique, arrivée d'un accident du travail...).

Proposition 45 *La fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est égale à*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1-\exp(-\lambda x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

De plus,

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Proposition 46 *La loi exponentielle vérifie la propriété d'absence de mémoire. Soit X un v.a. de loi exponentielle. Alors pour tous $s,t>0$,*

$$P[X > t+s | X > t] = P[X > s]$$

preuve :

$$P[X > t+s|X > t] = \frac{P[(X > t+s) \cap (X > t)]}{P[X > t]} = \frac{P[X > t+s]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s]$$

3.5 Fonction d'une v.a. continue

Soit X une v.a de densité f et ψ une fonction sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \psi(X)$. Cherchons la densité de Y dans le cas où Y est une v.a. continue. Pour cela, on va écrire $P[a \leq Y \leq b]$ sous la forme $\int_a^b g(y)\mathrm{d}y$, pour tous $a < b$. La fonction g ainsi obtenue est la densité de Y. Supposons ψ bijective, de classe C^1, croissante. Dans le cas contraire, on découpera $\mathbb{R}$ en intervalles sur lesquels ψ est bijective (avant de faire le changement de variable ci-dessous). Soit $a < b$ quelconques.

$$P[a \leq Y \leq b] = P[a \leq \psi(X) \leq b] = P[\psi^{-1}(a) \leq X \leq \psi^{-1}(b)] = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $y = \psi(x)$. On obtient

$$P[a \leq Y \leq b] \;=\; \int_a^b f\big(\psi^{-1}(y)\big)\frac{1}{\psi'\big(\psi^{-1}(y)\big)}\mathrm{d}y$$

Ainsi, la densité de Y est

$$h(y) = \frac{f\big(\psi^{-1}(y)\big)}{\psi'\big(\psi^{-1}(y)\big)}$$

Exemple : Soit X de densité $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}$. Soient deux réels c et d avec c non nul. Quelle est la loi de $Y = cX + d$?
Soient $a < b$ quelconques.

$$P[a \leq Y \leq b] \;=\; P[a \leq cX + d \leq b] = P\Big[\frac{a-d}{c} \leq X \leq \frac{b-d}{c}\Big] = \frac{1}{2}\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} \mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $y = cx + d$. Alors $\mathrm{d}y = c\ \mathrm{d}x$ et

$$P[a \leq Y \leq b] = \frac{1}{2c}\int_a^b \mathbb{1}_{[0,2]}((y-d)/c)\mathrm{d}y$$

Or $0 \leq (y-d)/c \leq 2$ ssi $d \leq y \leq 2c + d$, d'où

$$P[a \leq Y \leq b] = \frac{1}{2c}\int_a^b \mathbb{1}_{[d,2c+d]}(y)\mathrm{d}y$$

La densité de Y est donc la fonction g définie par

$$g(y) = \frac{1}{2c}\mathbb{1}_{[d,2c+d]}(y)$$

Théorème 47 (Une transformation bien utile) *Soit X une v.a. continue, de fonction de répartition F. Alors $F(X)$ suit la loi uniforme sur* $[0, 1]$.

preuve : même si F n'est pas strictement croissante, on est en mesure de définir une fonction inverse de F par

$$F^{-1}(y) = \min\{x : F(x) \geq y\}$$

Et on obtient, avec la continuité de F :

$$P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi uniforme. □

Le résultat suivant permet de simuler de nombreuses lois à partir de nombres uniformément répartis entre 0 et 1.

Théorème 48 *Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $Y = F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.*

preuve : D'après la définition de F^{-1}, on a pour tout $0 < x < 1$,

$$F^{-1}(y) \leq x \text{ ssi } F(x) \geq y$$

En remplaçant y par U, on obtient

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Exemple : pour simuler une réalisation d'une v.a. de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, il suffit de calculer $-\log(1-u)/\lambda$ où u est un nombre uniformément réparti entre 0 et 1.

3.6 Exercices

Exercice 1 — Montrer que si X est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors la variable aléatoire $Z = \sigma X + m$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Exercice 2 — Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Calculer $P[X \leq 1.62]$, $P[X \geq -0.52]$, $P[-1 < X < 1]$. Trouver u tel que $P[X \leq u] = 0.334$.

Exercice 3 — La largeur (en cm) d'une fente dans une pièce fabriquée en aluminium est distribuée selon une loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0,012$. Les limites de tolérance sont données comme étant $2,000 \pm 0,012$. Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses ?

Exercice 4 — Soit X une variable aléatoire gaussienne. On sait que :

$$P[X \leq 3] = 0,5517 \qquad \text{et} \qquad P[X \geq 7] = 0,0166$$

Déterminer la moyenne et l'écart-type de X.

Exercice 5 — Dans une usine d'emballage, un automate remplit des paquets de café de 250g. On sait que l'automate verse en fait une quantité de café variable, régie par une loi normale de moyenne réglable et d'écart-type 3. Quelle doit être la moyenne théorique choisie pour que 90% des clients achètent bien au moins 250g de café ?

Exercice 6 — Dans ce problème, les durées des trajets sont supposées de loi normale.
1) Un directeur de société habite dans la ville A. Il part de chez lui à 8h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9h. La durée de son trajet est, en moyenne, de 13 minutes, avec un écart-type de 3 minutes. Quelle est la probabilité que le directeur arrive en retard ?
2) La secrétaire du directeur habite en A, elle va au bureau avec le train de 8h32 ; elle

descend à la station B. Elle prend ensuite le bus qui part de B à 8h50 (sans attendre le train), pour aller de B à son bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 minutes, pour écart-type 2 minutes, et la durée du trajet en bus a pour moyenne 9 minutes et pour écart-type 1 minute. Les durées de trajet en train et en bus sont indépendantes. Quelle est la probabilité que la secrétaire arrive à l'heure ?
3) Quelle est la probabilité pour que le directeur ou la secrétaire (c'est-à-dire l'un au moins des deux) arrive à l'heure, les durées des trajets du directeur ou de la secrétaire étant supposées indépendantes ?

Exercice 7 —Soit X une v.a. continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} a(9x - 3x^2) & \text{pour } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer la constante a.
2) Déterminer $P[X > 1]$ et $P[1/2 < X < 3/2]$.
3) Quelle est la fonction de répartition de X ?
4) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 8 — Soit X une v.a. continue de loi uniforme sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$. Soient c et d positifs avec $a < \sqrt{c} < \sqrt{d} < b$. Écrire $P[c < X^2 < d]$ sous forme d'une intégrale entre c et d. En déduire la densité de la v.a. X^2.

Exercice 9 — Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Calculer $P[X \leq 2]$ et $P[X > 0.5]$. Déterminer la densité de $Y = 3X$. De quelle loi s'agit-il ?